在纪念陈省身诞辰110周年的会议举行之际，很高兴也很荣幸能写下这篇短文。让我感到特别高兴的事，这一会议由南开大学，即陈省身的母校来举办的。我在大约五十年前第一次来到南开大学，并就外微分给了一个系列讲座，而正是从陈省身那里我学到了这一课题的基本知识。首先我会对陈省身做几点简要的介绍，然后按他的惯例，我会讨论一些数学问题。

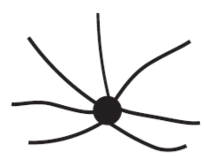
陈省身是二十世纪几何学界乃至整个数学界的一个独特人物。以其研究成果、与学生和同事的互动合作、及为学界提供的帮助而言，陈省身先生在我们数学学科做出的贡献和产生的影响都无与伦比。

他工作的许多领域都通过附加的名称证明了他的贡献。他创建的陈类作为连接微分几何和拓扑的对象，在数学中无处不在。陈类在许多不同领域的出现提供了它们基本性质的证据，包括代数几何，陈类是其中的中心拓扑不变量、数论、K 理论，当然还有拓扑学等等。他在定义陈类的原始论文中的一个重点是，它们的一种表示是通过Hermitian 向量丛的曲率矩阵中的多项式来表示。通过这样做，陈省身基本上开创了复微分几何的主题：一般全纯向量丛中的厄米度量，不仅仅是切丛，具有唯一自然的陈联络，这种现象在实的情况中不存在。此外，正如他经常强调的那样，曲率的符号性质在代数几何和复函数理论中具有深远的意义。

我可以提到的还有很多众所周知的领域，其中一些以他的名字命名，例如陈-西蒙斯不变量（在物理学中有重要应用）和Bott-Chern 类（开创了复函数理论的研究）。然而，我想简要描述陈省身工作的一个可能鲜为人知的领域。这是网的课题，对我来说也有特殊的意义，因为这是他和我合作并共同撰写论文的领域。尽管我们无法证明我们想要的主要结果，但正如陈省身工作的特点，这篇论文激起了相当大的兴趣，而其他人随后的工作不仅证明了我们所追求的结果，而且还得出了我和或许也是陈省身，连做梦都没想到的结果。

在转向数学之前，我先介绍一点历史。陈省身离开中国后去了汉堡（德国），当时那里有一个蓬勃发展的数学社区，其中一个在德国至少与哥廷根的另一个领先中心相提并论。汉堡著名的数学家中有威廉•布拉施克（Wilhelm Blaschke），他是一位极具创意的几何学家。他主要创建的领域之一是网几何，正是从Blaschke 和他周围的人（例如Bol）那里，陈省身了解了网，并据此撰写了论文，解决了Blaschke 提出的问题。这项工作展示了陈省身研究中普遍存在的许多特征。一个是目标是解决特定问题，而不是进一步发展一般理论。其次是需要进行重要而精妙的计算；然而，这些计算有一个概念框架，通过计算得到进一步发展。陈省身在1970 年代回到了这一课题，那时我们完成了我们的合作工作。

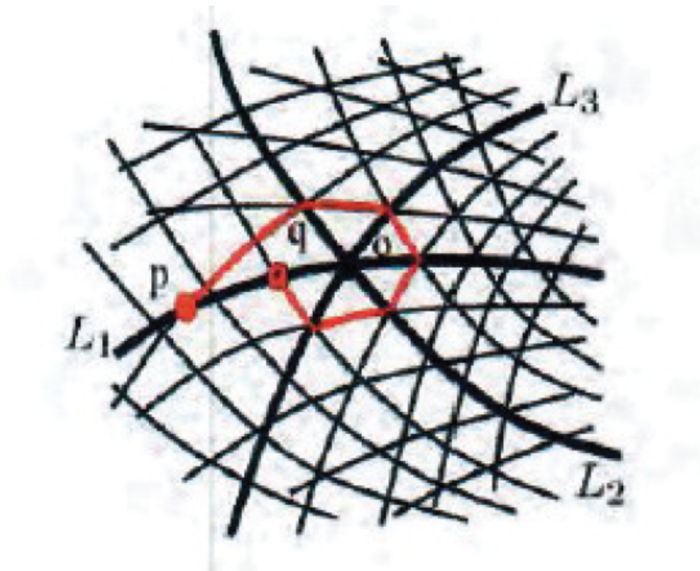
那么什么是网？我们为什么对它感兴趣？[1]以下 $U \subset \mathbb{C}^n$ 是小开集，所有的函数都是全纯的。一个 $d-$网由 U 的超曲面叶状结构集合 $\mathcal{W} = \{W_1, \ldots, W_d\}$ 给出。假设这些叶状结构处于一般位置。 $\mathbb{C}^2$ 中一个 4−网的实图像在每一点处形如下图



我们只看 $n = 2$ 时的情形，这样可以画出图形。网是可线性化的如果存在 U 上的坐标变换使得 W_i 是超平面（的一部分）。对 $d \leqq n$ ，任一网是可线性化的，而对 $d \geqq n+1$，这不成立。当 $n = 2$，$d = 3$ 时，给定如图所示的映射 $\mathrm{q} \to \mathrm{p}$ 可定义网曲率，其为零当且仅当 $\mathrm{p} = \mathrm{q}$。[2] 这就是网可线性化的充要条件。

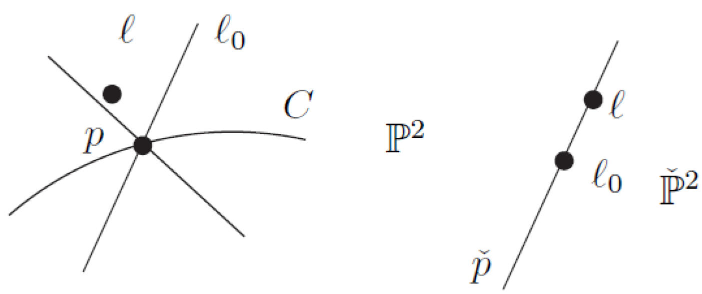
[1]网几何是局部微分几何的一个分支。我们将看到它和代数几何以及一些特殊函数的深刻联系。我们不进行深入讨论，关于网几何的介绍和历史，参见Jorge Vitório Pereira和Luc Pirio所著的“An invitation to web geometry”, arXiv:1107.0595vi, 4 Feb 2011。

[2]这个图片取自Pereira-Pirio的书，其中 $L_i = H_i$ ，我们从q出发以 $\epsilon-$间隔沿着 L_i 移动到 p 。

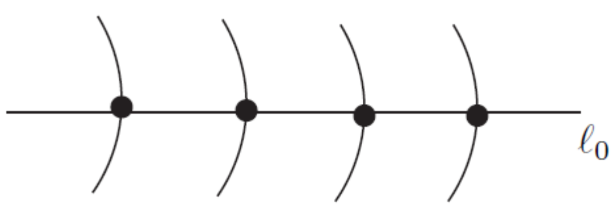


如下图所示，$\mathbb{C}^2$ 中一段曲线 C 定义了对偶射影平面 $\check{\mathbb{P}}^2$ 中的一个网。

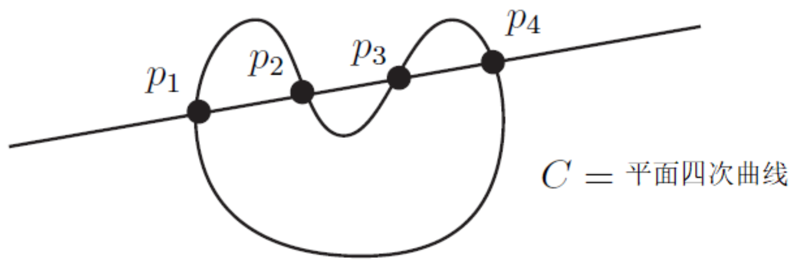
(1)



• 由射影对偶性，通过点 $p = \ell_0 \cap C$ 的直线 ℓ 形成了 $\check{\mathbb{P}}^2$ 中由 ℓ_0 决定的直线 $\check{p}$，使得 ℓ 是这条直线上的一点。
• 在 $\check{p}$ 周围的开集 $U \subset \check{\mathbb{P}}^2$ 中的任一直线均与 C 相交，所以上述图像在 U 中也成立并且决定了一个通过任意点 $\ell_0 \in U$ 的超曲面。
为了得到 d−网，我们取 d 条曲线段并使用下面的图像



当这些曲线段是某条代数曲线的一部分时，代数几何就会被引进来。



$\mathbb{P}^n$ 中超平面组成对偶射影空间 $\check{\mathbb{P}}^n$，一般的 d 次非退化代数曲线 $C \subset \mathbb{P}^n$ 生成 $\check{\mathbb{P}}^n$ 中的一个 $d-$网。

解析地看，一个网是由水平集 $\{u_i = 常数\}$ 给出，其中 $u_1, \ldots, u_d \in \mathcal{O}(U)$ 是 U 上的全纯函数。我们可以取坐标变换 $u_i \to f_i(u_i) \cdot u_i$，其中 f_i 非零。在图(1)中若 $\omega = f(z)dz$ 是 C 上的非零全纯1-形式，则函数

$$u(\ell_0) = \int^{\ell_0 \cap C} \omega \tag{2}$$

的水平集定义了一个 $1-$网，也就是一条经过点 $\ell_0 \in \check{\mathbb{P}}^2$的直线。

一个阿贝尔方程由以下 U 上的线性关系给出。

$$a_1(u_1)u_1 + \cdots + a_d(u_d)u_d = 0$$

这个名称取自阿贝尔定理。其断言对非奇异平面四次曲线，有

$$\sum_{i=1}^{d} \int_{p_0}^{p_i} \omega = 0 \tag{3}$$

其中 ω 是 C 上的正规 $1-$形式。我们可以由(2)定义网，并由(3)给出阿贝尔方程。这样的 $1-$形式组成的空间的维数是 $g(C) = 3$，这里 $g(C)$ 是 C 的亏格。

阿贝尔关系组成的线性空间是有限维的，其维数是 $r(\mathcal{W}) := \mathcal{W}$的秩 。在陈的博士论文中，他证明了对 $n > 2$ ，

$$r(\mathcal{W}) \leqq \pi(d, w) \tag{4}$$

其中Castelnuovo数是

$$\pi(d, w) = \{ \ \mathbb{P}^n 中d次非退化代数曲线的最大亏格 \ \}。$$ [3]

我和陈一起研究了他在1970年代提出的问题。(4)的反问题是该问题的特殊情况。具体地说，我们要证明若 $n > 2$ 及 $d \geqq 2n$ ，则任意满足(4)中等式的秩最大的网都可以通过上述方式代数化和线性化。正如Pereira-Pirio的书中提到的，尽管我们没有给出这个结果的完整证明，但是这篇论文重新引起了对网的兴趣，以及接下来并延续至今对网几何的研究热潮。这一结果的完整证明最终在2005年由Trespreau给出，2008年的布尔巴基讨论班介绍了这一结果以及其他相关的工作，向整个数学界展示了对网领域研究的新的兴趣和重要意义。

[3] Bol得到了$n = 2$时的结果。对$n > 2$，此结论变得非常复杂。Castelnuovo 数可以由一个涉及二项式系数的显式给出。当 $n = 2$ 时，它等于 $\binom{d-1}{2}$，即 d 次光滑平面曲线的亏格。